I La formule de sommation par parties

Le but de cette section est de présenter la formule de sommation par parties, un résultat technique classique en théorie analytique des nombres, et d'en voir quelques applications (pas forcément en théorie des nombres). Les résultats que j'avance (pour la partie théorie des nombres) peuvent être retrouvés dans tout livre de théorie analytique des nombres, tel que ceux de Tenenbaum, bien que les auteurs aient tendance à favoriser l'utilisation de l'intégrale de Stieltjes.

Théorème I.1: Formule de sommation par parties

Soit $x \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{N}, f : [a, x] \to \mathbb{C}$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^1([a, x])$. Alors :

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(n) = \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(x) - \int_a^x g'(t) \left(\sum_{a \leqslant n \leqslant t} f(n) \right) \mathrm{d}t.$$

Démonstration : On va en voir deux preuves, une directe assez rapide, l'autre un peu plus longue mais qui utilise une transformation d'Abel :

— *Preuve 1 :* Par le théorème fondamental de l'intégration, on peut écrire :

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(n) = \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n) \left(g(x) - \int_n^x g'(t)\,\mathrm{d}t \right) = \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n) \left(g(x) - \int_{\mathbb{R}} g'(t) \mathbb{1}_{[n,x]}(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(n) &= \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(x) - \int_{\mathbb{R}} g'(t) \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n) \mathbb{1}_{[n,x]}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(x) - \int_{\mathbb{R}} g'(t) \mathbb{1}_{[a,x]}(t) \sum_{a \leqslant n \leqslant t} f(n)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Un peu de détail sur cette ligne qui ne paie pas de mine : déjà si $t \notin [a, x]$, le terme sur la ligne au dessus est nul. Maintenant si $t \in [a, x]$ alors les $n \in [a, x]$ qui vérifient $t \in [n, x]$ sont ceux tels que $n \in [a, t]$. On en déduit le résultat annoncé.

— *Preuve 2 :* On note pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \sum_{n=a}^{x} f(n)$ avec la convention que la somme vaut 0 si $x < a$., comme annoncé on fait une transformation d'Abel et en utilisant encore le théorème fondamental de l'intégration :

$$\sum_{n=a}^{x} f(n)g(n) = \sum_{n=a}^{x-1} F(n)(g(n) - g(n+1)) + F(x)g(x) + 0 = F(x)g(x) - \sum_{n=a}^{x-1} F(n) \int_n^{n+1} g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puis on utilise la même astuce qu'à la première preuve pour terminer :

$$\sum_{n=a}^{x} f(n)g(n) = F(x)g(x) - \int_1^x g'(t) \sum_{n=a}^{x-1} F(n) \mathbb{1}_{\{t \in [n,n+1]\}}\,\mathrm{d}t = \sum_{a \leqslant n \leqslant x} f(n)g(x) - \int_a^x g'(t) \sum_{a \leqslant n \leqslant t} f(n)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

Notations : Je noterais par la suite pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnaire.

Les applications sont toujours liées à une estimation de somme non triviale où l'on se ramène plutôt à estimer une intégrale, où l'on sait a priori faire plus de choses. Le premier exemple qui vient à l'esprit est la comparaison série-intégrale, où l'on peut constater que l'on retrouve les mêmes équivalents, mais d'une manière différente. C'est même parfois plus fort pour chercher à avancer dans le développement limité. Je cite deux exemples connus.

Proposition I.2

On a les résultats suivants :

—
$$\sum_{n \leqslant x} \log(n) = x\log(x) - x + \mathcal{O}_{x \to +\infty}(\log(x)).$$

—
$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} = \log(x) + \mathcal{O}_{x \to +\infty}(1).$$

De plus :
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} - \log(x) \right) = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2}\, \mathrm{d}t := \gamma.$$

Démonstration :

— On applique la formule de sommation par parties à $f \equiv 1$ et $g(x) = \log(x)$ pour obtenir :
$$\sum_{n \leqslant x} \log(n) = \lfloor x \rfloor \log(x) - \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\, \mathrm{d}t = x\log(x) - x + \{x\}\log(t) - \int_1^x \frac{\{t\}}{t}\, \mathrm{d}t.$$
Or comme la partie fractionnaire est comprise entre 0 et 1 on obtient :
$$\{x\}\log(t) = \mathcal{O}_{x \to +\infty}(\log(x)), \qquad \text{et} \qquad \int_1^x \frac{\{t\}}{t}\, \mathrm{d}t = \mathcal{O}_{x \to +\infty}(\log(x)),$$
ce qui donne l'estimation annoncée.

— On applique une nouvelle fois la formule de sommation par parties à $f \equiv 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ pour trouver que :
$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2}\, \mathrm{d}t = 1 + \ln(x) - \frac{\{x\}}{x} - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$
Comme l'intégrale converge, on en déduit les deux faits annoncés.

□

J'ajoute qu'on peut retrouver les critères de convergences des séries de terme général $\dfrac{1}{k^\alpha}$ ainsi que les équivalents associés (des sommes partielles en cas de divergence et des restes en cas de convergence). Il suffit d'appliquer la formule de sommation par parties avec $f \equiv 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ et de finir comme dans la preuve ci-dessus.

Je précise aussi qu'on peut démontrer la formule d'Euler-MacLaurin avec la formule de sommation par parties, c'est pas forcément plus rapide donc je ne présente pas ça en détail. Par contre je pense que c'est bien de voir le parallèle entre la comparaison série-intégrale, la formule de sommation par parties, et la formule d'Euler-MacLaurin : elles permettent toutes de comparer une somme à une intégrale. La première, elle est intuitive mais elle n'est pas générale et surtout elle nous donne un encadrement pas une égalité par rapport aux deux autres. La formule d'Euler-Maclaurin est plus précise en soi que la formule de sommation par parties car elle nous donne un développement limité à tout ordre de quelques séries assez simples (genre la série harmonique), par contre c'est un peu l'usine à gaz pour la preuve ou pour la manipuler en toute généralité. La sommation par parties possède l'avantage d'être plus simple à manipuler tout en étant pas trop éloignée de l'esprit de la comparaison série intégrale.
C'est aussi un résultat qui est utile quand on manipule des fonctions à valeurs complexes mais qu'on aimerait se ramener à une intégrale parce que la comparaison série-intégrale ne marche plus ! En voici un exemple :

Proposition I.3

$$x \mapsto \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} n^{it} \text{ n'a pas de limite quand } x \to +\infty.$$

Démonstration : D'après la formule de sommation par parties :

$$\sum_{n=1}^{x} n^{it} = \lfloor x \rfloor \, x^{it} - it \int_1^x \lfloor u \rfloor \, u^{it-1} \, \mathrm{d}u = x^{it+1} \left(1 + \frac{it}{it+1} \right) + \mathcal{O}(1).$$

Ainsi [1] :

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} n^{it} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{it} \left(1 + \frac{it}{it+1} \right).$$

□

C'est surtout un résultat extrêmement utile en théorie analytique des nombres, j'en cite un résultat assez classique mais il y en a d'autres ! Comme ça, on a les théorèmes de Mertens, des équivalences entre plusieurs formes du théorème des nombres premiers mais ça devient déjà plus technique et surtout l'application de la formule de sommation par parties est moins directe.

Proposition I.4

On a la formule suivante [a] :

$$\forall s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) > 1 : \quad \zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x.$$

a. Cela permet de démontrer ζ admet sur $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(s) > 0\}$ un unique pôle en 1 de résidu égal à 1.

Démonstration : Soit $s > 1$. Par la formule de sommation par parties :

$$\zeta(s) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}.$$

□

1. En fait, on remarque qu'en module l'équivalent calculé est constant mais qu'il varie en argument en fonction de x, c'est parce que la fonction $n \mapsto n^{it}$ oscille trop.